



TITLE:

記号力学を用いたカオス力学系の
トポロジカルな特徴付けの一般化
(第7回『非平衡系の統計物理』シ
ンポジウム,研究会報告)

AUTHOR(S):

本池, 巧; 有光, 敏彦

CITATION:

本池, 巧 ...[et al]. 記号力学を用いたカオス力学系のトポロジカルな特徴付けの一般化(第7回『非平衡系の統計物理』シンポジウム,研究会報告). 物性研究 2000, 73(4): 750-761

ISSUE DATE:

2000-01-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/96758>

RIGHT:

記号力学を用いたカオス力学系の トポロジカルな特徴付けの一般化

本池 巧, 有光 敏彦^A

湘北短期大学 電子情報、筑波大学物理^A

1 はじめに

1.1 トポロジカルな解析の必要性

対称性の崩れた力学系では、しばしば、同じ制御パラメータにおいて異なるアトラクタの共存が観測される。軌道はその初期値の選び方によって、最終的にいずれかのアトラクタに取り込まれていく。この初期値依存性のため、実験や数値計算などで得られたアトラクタから系の相図を作成しようとした場合、共存するアトラクタを分類する必要がある。Poincaré断面を使った解析では周期、安定性、リアプノフ指数等の局所的な情報しか得られない。一般の場合、アトラクタの一部しか捉えない量による分類を行なうのは難しい。アトラクタをうまく分類するにはアトラクタ全体の性質を用いる必要がある。そのような方法の一つとして、アトラクタのトポロジカルな性質によって軌道の特徴付ける方法について考えてみる。

さて以降では、我々は周期的外力の働く二次元空間上の非自励系を解析対象とする。この系は、

$$\dot{u} = f_1(u, v, \theta, \delta), \quad (1)$$

$$\dot{v} = f_2(u, v, \theta, \delta), \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = 1, \quad (3)$$

と自励系の形に書き直すことができる。ただし、 $(u, v) \in R^2, \theta \in S^1$, そして δ は外力の振幅である。なお、外力の周期は時間を適当にスケールすることで常に 1 としている。さらに関数 f_1 と f_2 は次の条件、

1. f_1 と f_2 は θ に関する周期関数,
2. f_1 は v に関して単調関数,

を満たすとする。このような低次元力学系の性質はほとんど調べ尽くされ、なぞいまさらと思われるむきもあるかもしれない。しかし、これから述べるように、このような系をトポロジカルな観点から改めて見直すと、そこには多くの興味深い現象が隠されていることがわかる。

対象とする系においては、アトラクタとして周期軌道、ストレンジアトラクタの二つがある(図 1)。これら 2 種類のアトラクタのトポロジカルな特徴づけについて考えて見よう。周期軌道はその時間発展を無視し形状のみに注目すると、トーラス体上の結び目とみなすことができる。よって、周期軌道は様々な結び目不変量を用いて特徴付けることができる。一方、ストレンジアトラクタに関しては今のところ直接特徴づける方法は見付かっていない。しかし、ストレンジアトラクタに埋め込まれている無数の不安定周期軌道を用いて間接的に特徴づけることが可能である(図

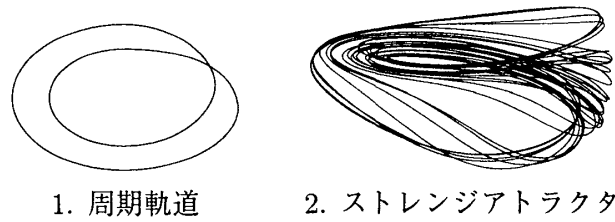


図 1: 2 種類のアトラクタ

2) [1, 2, 3]. この手法は, ストレンジアトラクタを不安定周期軌道を用いたトポロジカルな展開とみなすことができる. 2 種類のアトラクタともその特徴づけは周期軌道を基にしている. このような解析を行なうためには, 周期軌道を系統だててうまく取り扱う手法を考える必要がある. その方法としてテンプレートモデルを使った方法が挙げられる. これに関しては以降で詳しく述べることにする.

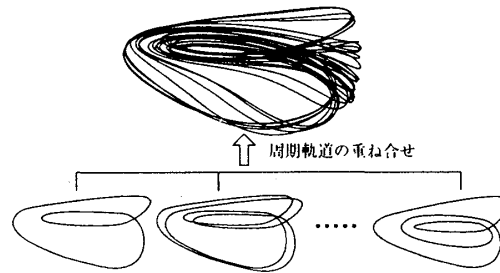


図 2: ストレンジアトラクタの特徴付け

1.2 テンプレートモデル

周期軌道のトポロジカルな性質の研究は, 上江洌, 相澤 [4, 5] により始められ様々なものがある. その中で, 今の我々の目的と深い関わりがあるものとして, Birman, Williams や Holmes, Williams の仕事がある. Birman, Williams は, Lorenz テンプレート (図 3(a)) と呼ばれる 2 次元多様体を使って Lorenz 方程式の全ての周期軌道のトポロジカルな性質を特徴付けることが可能であることを示した [7, 8]. さらに, Holmes, Williams [9, 10] は, Lorenz テンプレートを拡張した馬蹄形テンプレート ((図 3(b)) を用いて, Birman, Williams の結果を一般の周期的外力の働く微分方程式に適用した. 特に彼らの記号力学を援用したテンプレート上の周期軌道の解析方法は, 我々の解析方法の軸の一つとなっている. このような, 彼らが考え出した枝分かれと合流を持つ 2 次元多様体はテンプレートと呼ばれる.

テンプレートはその単純な構造より, 周期軌道の系統立った取り扱いやアトラクタの分類に適している. そこで, 我々はテンプレートを用いてアトラクタのトポロジカルな特徴づけを行なうことを考えた. しかし, そのためには実験または数値計算データから逆にテンプレートの構造を求めるなどいくつかの技術的な問題点がある. 本論文は, テンプレートによる力学系のアトラクタ (周期軌道やストレンジアトラクタ) のトポロジカルな解析方法について詳しく述べていく. まずはテンプレートを使った周期倍分岐カスケードの分類に関する我々の今までの研究成果を簡単に紹介し, その次に, その手法を一般のカオス領域へ拡張するためにはテンプレートをどのよう

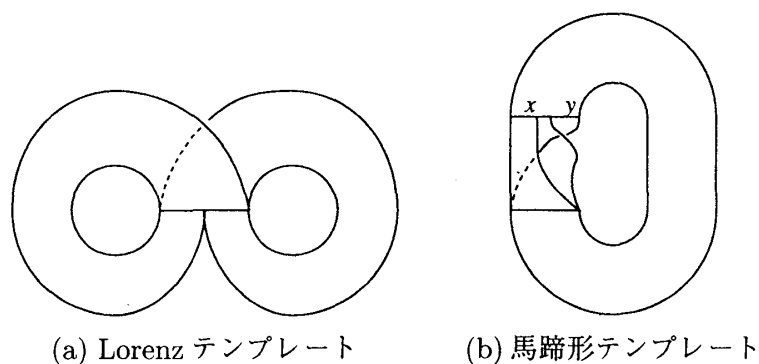


図 3: Lorenz テンプレートと馬蹄形テンプレート

に拡張すべきかについて論じていくことにする.

2 周期倍分岐カスケードを特徴づけるテンプレート

2.1 (ξ, p) -テンプレート

この節では, 周期倍分岐によって発生した周期軌道のトポロジカルな性質が, テンプレートによってどのように特徴づけられるかについて説明する. 交差点数 c_0 の n -周期軌道が, 周期倍分岐により様々な $n \times 2^k$ 周期軌道が作り出されていく場合を考えてみる. 我々は, 馬蹄形テンプレートの拡張である (ξ, p) -テンプレート (図 4) を導入することで, 周期倍分岐カスケード中の周期軌道の特徴付けることに成功した [11, 12, 13]. (ξ, p) -テンプレートは二つのパラメータ ξ と p によって特徴づけられる. ξ は偶数であり, テンプレートの帯に含まれる半ひねりの数である. p は ± 1 のいずれかで, テンプレートの枝分かれの種類を示す (図 4).

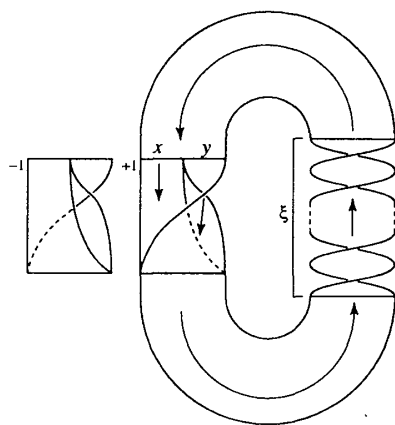


図 4: 拡張された馬蹄形テンプレート

テンプレート上の周期軌道に対し, 左 (右) 側の帯を進む軌道に記号 x (y) を付すことにすると, n 周期軌道軌道は長さ n の x, y の二文字からなる記号列で特徴づけられる. Holmes らの記号力学を用いた解析を (ξ, p) -テンプレートに適用することで, 周期倍分岐カスケード中の周期軌

道は二文字の記号力学における許容列から得られる普遍的な列:

$$W_1 = \{y, xy, xy^3, xy^3(xy)^2, xy^3(xy)^2(xy^3)^2, \dots\}, \quad (4)$$

によって特徴付けられることを発見した [11, 12].

ところで, テンプレートの特徴づける二つのパラメータ (ξ, p) を実験や数値計算のデータより求めるには, 局所交差数という量を用いるとよい. $n \times 2^k$ 周期軌道 に対する局所交差数 $C_{\langle k \rangle}$ とは, $n \times 2^{k-1}$ 周期軌道のまわりの管状領域に沿った $n \times 2^k$ 周期軌道の半ひねり (図5) の総数である. (ξ, p) と $n \times 2^2$ 周期軌道の局所交差数 $C_{\langle 2 \rangle}$ は

$$C_{\langle 2 \rangle} = 2\xi + p, \quad (5)$$

の関係にある. ξ は偶数, $p = \pm 1$ であることから, $C_{\langle 2 \rangle}$ から (ξ, p) が一意的に求まる. なお, 局所交差数は軌道のデータから直接求められるだけでなく, 軌道のパワースペクトルからも求めることが可能である [11]. このように局所交差数を用いると, 周期倍分岐カスケードを特徴づけるテンプレートの構造が比較的簡単に求められる.

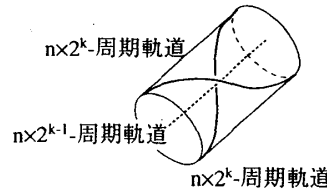


図 5: 分岐前の軌道に沿った分岐後の軌道の半ひねり

2.2 軌道のからみ数, 交差点数

$C_{\langle n \rangle}$ を $n \times 2^k$ -周期軌道の局所交差数, $c_{\langle k \rangle}$ を $n \times 2^k$ -周期軌道の交差点数, $\ell_{\langle k+1, k \rangle}$ を $n \times 2^{k+1}$ -周期軌道と $n \times 2^k$ -周期軌道のからみ数とする. これら三つのトポロジカルな量は, 漸化式

$$C_{\langle k+2 \rangle} = C_{\langle k+1 \rangle} + 2C_{\langle k \rangle}, \quad k \geq 1, \quad (6)$$

$$c_{\langle k \rangle} = 4c_{\langle k-1 \rangle} + C_{\langle k \rangle}, \quad k \geq 1, \quad (7)$$

$$\ell_{\langle k+1, k \rangle} = 2c_{\langle k \rangle} + C_{\langle k+1 \rangle}, \quad k \geq 0, \quad (8)$$

を満たす. 初期条件, $C_{\langle 1 \rangle} = \xi + p$, $C_{\langle 2 \rangle} = 2\xi + p$ および $c_{\langle 0 \rangle} = c_0$ から, これらの漸化式を解くと,

$$C_{\langle k \rangle} = \lambda_{k-1}\xi + \lambda_k(\xi + p), \quad k \geq 1, \quad (9)$$

$$\ell_{\langle k+1, k \rangle} = 2 \cdot 4^k c_0 + \eta_k \xi + \eta_{k+1}(\xi + p), \quad (10)$$

$$c_{\langle k \rangle} = 4^k c_0 + \frac{1}{8}(\eta_{k+1} - \lambda_{k+2})\xi + \frac{1}{2}(\eta_{k+1} - \lambda_{k+1})(\xi + p), \quad (11)$$

が得られる. ただし,

$$\lambda_k = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k), \quad \eta_k = \frac{1}{5}(4^k - (-1)^k), \quad (12)$$

である [11, 12, 13].

3 カオス軌道を特徴づけるテンプレート

前節の議論より周期倍分岐カスケード中の全ての周期軌道は (ξ, p) -テンプレートによって特徴づけられることがわかった。さて、周期倍分岐カスケードによって発生した周期軌道は、やはりカオス領域においても存在し続けると考えられる。しかも周期軌道は分岐点以外ではそのトポロジカルな構造は変化しないため、カオス領域においても、 $n \times 2^k$ 周期軌道はそのトポロジカルな構造を保ったまま存在し続けることが予想される。そこで我々は次の仮定をおく：

仮定 ストレンジアトラクタに埋め込まれている全ての不安定周期軌道のトポロジカルな構造は周期倍分岐カスケードによって特定されたテンプレートによって解析できる。

この仮定を確かめるため、損失変調レーザモデルを用いてカオス領域中の各周期軌道間のからみ数 $l_{m,n}$ を求めた結果を表1に示す。このカオスの前段階の周期倍分岐カスケードについては、すでに $(2, -1)$ -テンプレートによって特徴づけられることがわかっている。そこで、 $(2, -1)$ -テンプレートと記号力学の許容列を使って表1の各軌道間のからみ数の値を解析した。その結果、表1の各軌道間のからみ数は、表2の記号列によって特徴付けられる $(2, -1)$ -テンプレート上の周期軌道間のそれとまったく一致することがわかった。すなわち、ストレンジアトラクタ中の不安定軌道のトポロジカルな構造は $(2, -1)$ -テンプレートによって特徴付けられたわけである。ここでは詳細は省略するが、テンプレートによるストレンジアトラクタの特徴づけの妥当性を確かめるため、周期軌道の構造の厳密計算可能な区分線形系を使って詳しく解析した。その結果、周期倍分岐カスケードによって求まったテンプレートは、系の流れの構造を単純化したものになっており、しかも二文字の記号力学によるテンプレート上の周期軌道の特徴づけは、実際の不安定周期軌道のからみの構造だけでなく位置関係までの確にとらえていることがわかっている。

表 1: 損失変調レーザモデルでの不安定周期軌道のからみ数 $l_{m,n}$

	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	1	1				
3	2	4	3			
4	2	5	8	7		
5	3	6	10	12	12	
6	3	7	13	14	18	17

表 2: 各不安定周期軌道に対する記号列

周期	1	2	3	4	5	6
記号列	y	xy	xyy または xyy	$xyyy$	$xyyyy$ または $xyyxy$	$xyyyyy$ または $xyyyxy$

4 可約テンプレートと既約テンプレート

実は、前節で行なったカオス領域のテンプレートを使った特徴づけは1周期SNBに限定した話で、そのまま一般の n 周期SNBに当てはめるには問題がある。次節で詳しく解説するが、 n 周期SNBから始まる周期倍分岐カスケードを特徴づけるテンプレートをカオス領域にまで拡張するには、テンプレートの可約性が重要な鍵となる。この節では周期倍分岐カスケードで得られたテンプレートのカオス領域への適用を考える前準備として、テンプレートの可約性について説明する。ところで、今までは説明しなかったが、周期倍分岐カスケードを特徴づけるテンプレートには、標準テンプレートと原始テンプレートの二つが存在する。標準テンプレートとは、SNB軌道の周期 n 毎に軌道の特徴づけるテンプレートであり、テンプレートを1周するのに要する時間は、実際の力学系の n 周期に対応する。原始テンプレートとは、外力の周期毎に軌道の特徴づけるテンプレートであり、テンプレートの1周は実際の力学系の1周期に一致する。標準テンプレートの場合、周期軌道は普遍的な記号列 $W = \{y, xy, xyxy, xyxyxyxy, \dots\}$ で特徴づけられるが、原始テンプレートの場合 $n \times 2^k$ 周期倍分岐に対する記号力学の許容列で特徴づけられる。なお標準および原始テンプレートいずれを用いても周期軌道のトポロジカルな構造は同じである。よって、我々は普遍的な記号列によって一貫した取り扱いが可能であることから、特に断らない限り周期倍分岐は標準テンプレートによって特徴づけを採用している。

ところで、全ての周期倍分岐は標準テンプレートで特徴づけられるが、原始テンプレートでは必ずしもそうとは限らない。つまり、周期倍分岐には標準テンプレートと原始テンプレートの両方で特徴づけられるものとそうでないものがあることになる。これについてまずは、標準テンプレート以外に原始テンプレートでも特徴づけが可能な場合を考えてみる。例として、損失変調レーザモデルでの3周期SNBから始まる周期倍分岐カスケードを取り上げる。この場合、周期倍分岐カスケード中の周期軌道は図6(a)の(2, -1)-標準テンプレートと記号列 $W'_1 = \{X, XY, XYXY, XYXY(XY)^2, \dots\}$ によって特徴づけられるばかりでなく、図6(b)の(0, 1)-原始テンプレートと記号列 $W_3 = \{xyx, yyxxyx, yyx(xyx)^3, yyx(xyx)^3(yyxxyx)^2, \dots\}$ によっても特徴づけられる。ただし、外力の周期に基づく記号列と外力の周期の n 倍に基づく記号列を区別するため、前者は小文字の x, y で後者は大文字の X, Y によって表記することにした。

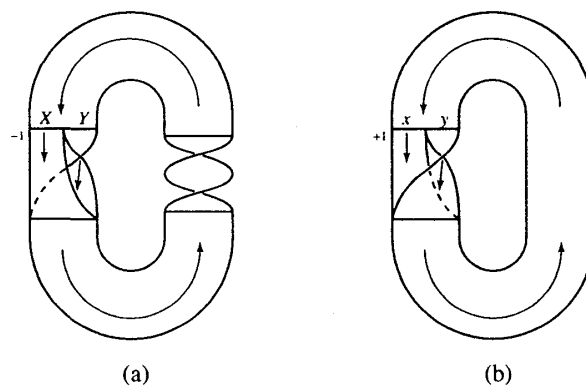


図 6: 標準テンプレートと原始テンプレート

ところで、 W_3 中に現れる記号列を観察すると、すべてが記号列 yyx または xyx の組合わせとなっていることがわかる。このことは、周期倍分岐カスケード中の周期軌道は3周期軌道 yyx または xyx の近傍に局在していることを意味する。この局在性より周期軌道の構造は、 yyx または xyx のどちらの近傍を通過するかという情報によって決定される。そこで W_3 において yyx, xyx

を X, Y に置き換えてみると, W_3 は W'_1 と同一となる. したがって, 周期軌道の yyx と xyx の二つの近傍は, $(2, -1)$ -テンプレートと同等な構造によってつながっていると予想される. 詳細は省略するが, $(0, 1)$ -原始テンプレートから周期倍分岐軌道が存在する付近のみ切り出すと, そこには $(2, -1)$ -標準テンプレートと同じひねりと折り畳みが含まれている. すなわち, 埋め込まれた $(2, -1)$ -標準テンプレート部分が yyx と xyx の二つの近傍を結びつけているわけである. このように, 標準および原始テンプレートの両方で特徴づけが可能な場合, 標準テンプレートは原始テンプレートの一部に埋め込みが可能となる. このような標準テンプレートを可約テンプレートと呼ぶ.

次に, 原始テンプレートで特徴づけられない場合を考えてみる. 原始テンプレートで特徴付けできない理由としては, 特徴付ける記号列が存在しない, はじめに SNB によって発生する周期軌道と同値な軌道を持つ (ξ, p) -テンプレートが存在しないなどがある. そのような場合でも, 周期軌道の局在性から標準テンプレートによる特徴付けは可能である. ただし, 原始テンプレートが存在しないため, 標準テンプレートを他の原始テンプレートの一部に埋め込むことができない. このような標準テンプレートは既約テンプレートと呼ばれる.

5 拡張されたテンプレートによるストレンジアトラクタの特徴付け

標準テンプレート上の 1 周期は, もとの力学系では SNB で発生した周期軌道の周期に等しい. このような周期の引き延ばしは, 周期倍分岐カスケード中の周期軌道の局在性によって可能となっている. しかし, カオス領域では様々な周期軌道が関与するため, このような局在性は成り立たない. よってカオス領域は, 本来の外力の周期に基づく原始テンプレートによって特徴づけられなければならない.

標準テンプレートが可約な場合は, それと同等な原始テンプレートを使ってカオス領域を解析すればよい. ところが, 既約な場合は原始テンプレートが存在しないため, テンプレートによる特徴づけが行えない. しかし, 可約な場合と既約な場合のストレンジアトラクタの構造を比べると両者の間には大きな違いはなく, とともにテンプレートのような 2 次元多様体に単純化できるようにみえる. そこで, 周期倍分岐を特徴付けていた (ξ, p) -テンプレートに何らかの拡張を施せば, 既約テンプレートを可約化できる可能性があるのではないと思われる.

5.1 3 本枝テンプレート

テンプレートの拡張の一つとして, その枝の数を増やすことを考え, 枝の数の拡張の最も簡単な例として, 図 7 の 3 本枝テンプレートを取り上げる. それぞれの枝の名前を l, m, r とし, 帯の半ひねり数を $\xi^{(3)}$ とする. パリティ $p^{(3)} = \pm 1$ によって, 二種類の枝部のいずれかを指定する. このテンプレート上の周期軌道は l, m, r の 3 文字からなる記号列によって特徴づけられる. したがって, 写像関数の正負に応じて定義域が三つに分けられる 3 次写像を考え, その写像が作り出す記号列によって周期軌道は特徴づけられる.

この写像を与える例として, 非線形 Mathieu 方程式

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x(1 + \delta \cos \omega t) - x^3 = 0, \quad (13)$$

を考えてみる. その写像関数として, 対称性より

$$g(z) = Az^3 + (1 - A)z, \quad (14)$$

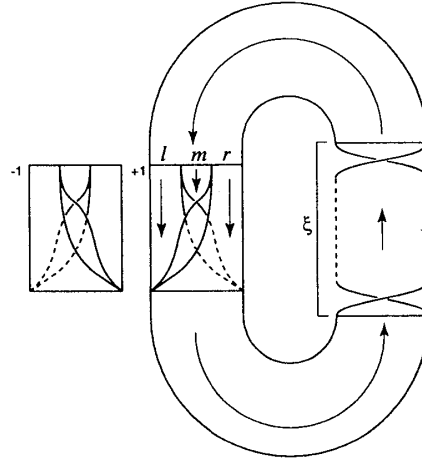


図 7: 3 本枝テンプレート

を考えることにする (図 8) .

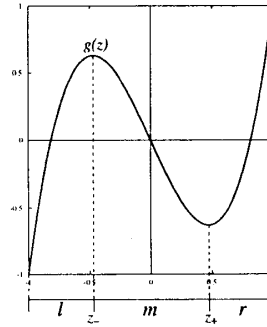


図 8: 3 次写像 $g(z)$, $z_{\pm} = \pm\sqrt{(A-1)/3A}$ は領域の境目である

パラメータ $k = 0.2$, $\omega = 2.0$ に固定し, 外力の振幅を $\delta = 3.27 \sim 3.35$ と変化させると 2 周期 SNB から始まる周期倍分岐カスケードが観測される. カスケード中の各周期軌道の局所交差数, 交差数およびからみ数の結果を表 3 に示す. このカスケードは既約テンプレートである $(4, -1)$ -テンプレートによって特徴付けられる.

表 3: 非線形マシュー方程式における周期倍分岐カスケード

k	1	2	3	4	5	ξ	p
局所交差数 $C_{(k)}$	3	7	13	27	53	4	-1
交差数 $c_{(k)}$	7	35	153	639	2609		
からみ数 $\ell_{(k+1,k)}$	5	21	83	333	1331		

原始テンプレートとして図 7 の 3 本枝テンプレートを選び, それが表 3 の周期倍分岐カスケードを特徴付けることができるかどうかみてみる. 写像 $g(z)$ における 2 周期 SNB から始まる周期倍分岐カスケード中の周期軌道の列は,

$$V = \{lm, lmlr, lmlrlmlm, lmlrlmlm(lmlr)^2, \dots\} \quad (15)$$

表 4: 非線形 Mathieu 方程式の各不安定周期軌道のからみ数 $\ell_{m,n}$

	2	4	6	8	10
2	1				
4	5	7			
6	8	16	19		
8	10	21	32	35	
10	13	26	40	52	57

で与えられる. 4, 8 周期軌道の記号列 $lmlr$, $lmlrlmlm$ と図 7 のテンプレートを用いると, 局所交差数 $C_{\langle 1 \rangle}$, $C_{\langle 2 \rangle}$ と 3 本枝テンプレートのパラメータ $(\xi^{(3)}, p^{(3)})$ が満たす関係式

$$\begin{aligned} C_{\langle 1 \rangle} &= 2\xi^{(3)} + p^{(3)}, \\ C_{\langle 2 \rangle} &= 4\xi^{(3)} + p^{(3)}, \end{aligned} \quad (16)$$

を得る. 表 3 の周期倍分岐カスケードの数値計算結果 $C_{\langle 2 \rangle} = 7$ を (16) 式に代入すると, $(\xi^{(3)}, p^{(3)}) = (2, -1)$ となる. 詳しい計算を行なうことで, このようにして得られた $(2, -1)$ -3 本枝テンプレート (図 9) と記号列 V は, 周期軌道は表 3 の結果を含めた周期倍分岐カスケード全体をうまく特徴付けていることがわかる. よって, 非線形マシュー方程式の場合, テンプレートの枝の数を増やすことで既約な 2 文字標準テンプレートの可約化に成功したといえる.

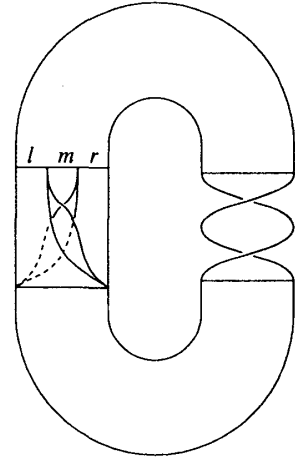


図 9: 非線形 Mathieu 方程式に対するテンプレート

5.2 ストレンジアトラクタの解析

前節で得られた $(2, -1)$ -原始テンプレートが, カオス領域に現れるあらゆる周期軌道のトポロジカルな構造を説明できるか調べてみる.

カオス領域での不安定周期軌道を数値計算によって求めその軌道間のからみ数 $\ell_{m,n}$ を表 4 に示す. その結果, 各軌道に対して表 5 のように写像 $g(z)$ が作り出す記号列を割り当てると, 観測した全ての周期軌道間のからみ数が $(2, -1)$ -3 本枝テンプレートによって説明できることが分かった. したがって, 周期倍分岐カスケードのみならずそれに続くカオス領域も, $(2, -1)$ -3 本枝テンプレートによって特徴づけられたわけである.

表 5: 非線形マシュー方程式の各不安定周期軌道に対する記号列

周期	2	4	6	8	10
記号列	lm	$lmlr$	$lmlrlr$ または $lmlrlm$	$lmlrlmlm$	$lmlrlmlmlm$ または $lmlrlmlmlr$

6 3本枝テンプレートの検証

最後に、得られた3本枝テンプレートが、実際の流れを理解するものとして妥当かどうか検証する。ストレンジアトラクタの大域的な構造は、最も短い周期の不安定軌道の不安定多様体によって決定される。そこで1周期軌道 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ にの不安定多様体の構造を描くと図10になる。この不安定多様体には $t=0$ から $t=\pi$ あたりにかけての半ひねりと、 $t=\pi$ あたりから $t=2\pi$ における両端の折り畳みの二つの特徴的な構造がみられる。この構造を模式化したものが図11(a)である。ただし図9との対応を見やすくするために、時間 t の向きを下向きにとった。このテンプレートの両端の折り畳みに沿って切れ目を入れて三つの枝に分割し(図11(b))、3本に分岐する部分を左ネジの向きに半ひねりする(図11(c))。鏡像反転して得られた多様体(図11(d))は、図9のテンプレートと同等である。

このように図9のテンプレートが実際の流れの構造を的確に捉えていることから、非線形 Mathieu 方程式の2周期SNBからはじまる周期倍分岐およびそれに続くカオス領域は、3本枝テンプレートによってうまく特徴づけられていることが検証された。

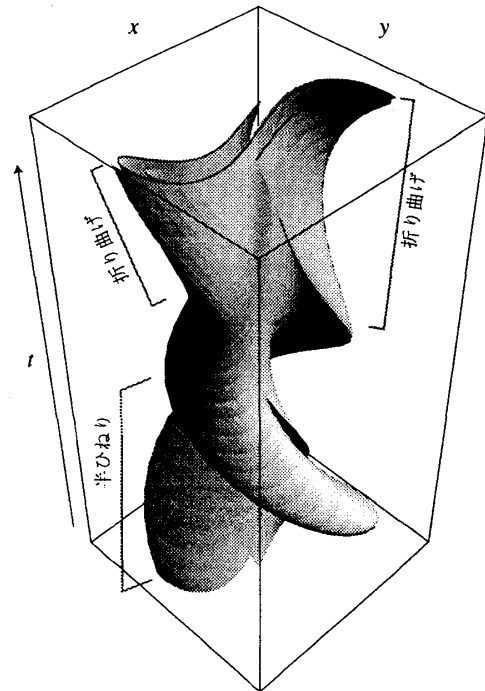


図 10: 1 周期軌道の不安定多様体

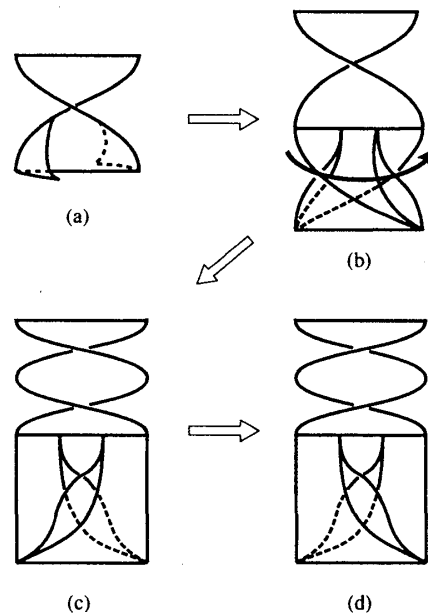


図 11: 不安定多様体の構造

7 まとめ

周期倍分岐カスケード中の周期軌道は、標準テンプレートとして構成した (ξ, p) -テンプレートと普遍的な記号列 $W = \{y, xy, xy^3, xy^3(xy)^2, xy^3(xy)^2(xy^3) \cdots\}$ によって特徴づけられる。したがって、周期倍分岐カスケードはテンプレートの構造パラメータ (ξ, p) によって分類可能となる。ところが、ストレンジアトラクタについては、周期倍分岐とは異なり原始テンプレートによって特徴づけなければならない。周期倍分岐カスケードが既約テンプレートによって特徴づけられていると、原始テンプレートが存在しないため、ストレンジアトラクタの解析が行えない。そのため、原始テンプレートとして考えていた (ξ, p) -テンプレートに拡張を施すことで、既約テンプレートを可約なものにしなければならない。

我々は、枝の数を増やすという拡張によって既約テンプレートの可約化が可能かどうか、非線形マシュー方程式を例に解析を行なった。その結果、原始テンプレートとして3本枝テンプレートを用いることで、既約な2本枝（標準）テンプレートの可約化に成功した。得られた3本枝原始テンプレートは、周期倍分岐カスケードおよびカオス領域ともに、周期軌道のトポロジカルな構造をうまく特徴付けている。しかも、テンプレートのひねり・折り畳みの構造は、系の流れの構造を的確にとらえていることが示された。つまり、非線形マシュー方程式に関しては、トポロジカルな特徴付けを行なうためには3本枝テンプレートを用いなければならないこととなる。このことから、2本枝テンプレートの枠内で原始テンプレートを作成することが不可能なのは当然といえる。だが、周期倍分岐の場合、周期軌道が局在性のため本質的には3本枝であるが2本枝の標準テンプレートによって特徴付けられるわけである。

以上のことからカオス領域の特徴づけに着手する際には既約テンプレートの可約化が問題となることが理解できたと思う。ただ可約化に関する研究はまだ端を発したばかりで、とりあえず本論文でその必要性を述べたという段階である。いまだ枝を増やすことで全ての既約テンプレートの可約化が可能かどうかさえ分かっておらず、もしかすると更なる拡張が必要なものがあるかもしれない。この問題に取り組むには3文字以上の記号力学の理論が必要とされるが、残念ながらこれに関する研究はあまり盛んではない。だが我々は、テンプレートの可約化という問題が3文字以上の記号力学の研究の発展に何らかの寄与を与えるのではないかと期待している。

参考文献

- [1] G.B. Mindlin, X.J. Hou, H.G. Solari, R. Gilmore and N.B. Tufillaro, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2350.
- [2] G.B. Mindlin, H.G. Solari, M.A. Natiello, R. Gilmore and X.J. Hou, J. Nonlinear Sciences **1** (1991) 147.
- [3] G.B. Mindlin and R. Gilmore, Physica D **58** (1992) 229.
- [4] Aizawa, Y. and Uezu, T., Prog. Theor. Phys., **67** (1982) 982.
- [5] Uezu, T. and Aizawa, T., Prog. Theor. Phys., **68** (1982) 1907.
- [6] P. Holmes, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A **292** (1979) 419.
- [7] J. Birman and R. Williams, Topology **22** (1983) 47.

- [8] J. Birman and R. Williams, Contemporary Math. **20** (1983) 1.
- [9] P. Holmes and R.F. Williams, Archive Rational Mech. and Analysis **90** (1985) 115.
- [10] P. Holmes, Physica D **21** (1986) 7.
- [11] T. Motoike, T. Arimitsu and H. Konno, Phys. Lett. A **182** (1993) 373.
- [12] T. Arimitsu and T. Motoike, Physica D **84** (1994) 290.
- [13] 本池巧, 有光敏彦, カオスとトポロジー, 培風館 1999.